

## Die Statistik des Zerfalls

Bernd Laquai, 3.8.2014 Update 4.12.23

„Traue keiner Statistik die Du nicht selbst gefälscht hast“ ist ein alter Spruch, der das Verhältnis vieler Menschen zu dieser mathematischen Disziplin deutlich zum Ausdruck bringt. Wer Strahlung quantitativ messen will, hat aber das Problem, dass diese Messtechnik ausschließlich auf Statistik beruht, auch wenn manche Messgerätehersteller alles daransetzen, dies nicht sichtbar werden zu lassen. Auf der anderen Seite wird man, wenn man die Natur genau genug anschaut, erkennen müssen, dass, sofern es eine schöpferische Kraft gab oder gibt, diese die Natur lediglich mit Mittelwert und Streuung festgelegt und die individuelle Realisierung dem Zufall überlassen hat. Dazu muss man sich nur die Körpergröße der Menschen oder das Gewicht der Äpfel an einem Baum anschauen. Aber genau damit haben viele Menschen, zumindest diejenigen mit philosophischem oder theologischem Tiefgang, ein enormes Problem. Die Grausamkeit der Statistik steckt nämlich darin, dass man auch deren seltene Extremfälle akzeptieren muss, zumindest wenn man selbst davon betroffen ist. Die schöpferische Kraft hat allerdings durch die Beschränkung auf die Festlegung der Statistik aus Sicht der Evolution genau zwei wichtige Dinge erreicht: Es wird die Selektion des Überlebensfähigsten ermöglicht und man muss sich nicht um jeden Einzelfall kümmern.

Wenn man sich den radioaktiven Zerfall anschaut, bemerkt man schnell, dass es da ganz genauso ist. Und wenn ein Messgerät eine quantitative Größe, wie Aktivität oder Dosis anzeigt, so ist das lediglich ein statistischer Mittelwert, der aus vielen Zerfallsereignissen berechnet wird. Das einzelne Ereignis ist danach völlig irrelevant.

Eine wichtige Erkenntnis zum Thema der Statistik ist aber auch, dass man als Mensch in der Natur nie die komplette Grundgesamtheit erfassen kann. Man kann sich lediglich auf eine Stichprobe konzentrieren und muss die entscheidenden Größen der Grundgesamtheit wie Mittelwert und Streuung daraus schätzen. Die logische Konsequenz davon ist, dass man zwangsläufig einen statistischen Fehler macht, den man erst erkennt, wenn man eine zweite oder weitere Stichprobe betrachtet. Wenn man also den radioaktiven Zerfall versucht quantitativ zu erfassen, sollte man den möglichen Fehler, den man beim Schätzen machen kann, kennen und auch angeben, sonst ist die Aussage nur halb so viel wert. Deswegen ist es auch sinnvoll, sich mit dieser Disziplin näher zu befassen, sonst liegt man unter Umständen mit großer Wahrscheinlichkeit völlig daneben.

Man muss aber zunächst in der Chemie bei der Stöchiometrie beginnen. Hat man 1g eines chemisch reinen Elements, dann kann man dieses durch die Atommassenzahl  $m_A$  teilen um die Anzahl der Atome darin zu bekommen. Da die Atommassenzahl in sogenannten atomaren Masseneinheiten [u] angegeben wird, muss man noch wissen, wie groß diese Einheit in g ausgedrückt ist. Es ist  $1u = 1.6605E-27g$ . Man kann sich aber auch merken, dass die Atommassenzahl in Gramm  $N_A$  Atome enthält, wobei  $N_A$  die Avogadro-Konstante  $6.0223E+23g/u$  ist. Also hat ein Gramm eines Stoffes  $x = N_A * 1u / m_A$  Atome. Für 1g Uran-238 bedeutet das, es besteht aus  $N_A/238u = 2.53031E+21$  Atomen. Beim Kalium-40 Isotop wären es dagegen  $40u / N_A = 1.50554E+22$  Atome, etwas mehr, da die Kalium Atome leichter sind. Das sind also unvorstellbar große Anzahlen an Kernen, welche da in einem Gramm enthalten sind. Wenn nun Uran und Kalium als primordiale Radionuklide die Evolution überlebt haben, so war das nur möglich, weil die Zerfallsrate auch extrem niedrig ist. Das Uran-238 und das Kalium-40 auf der Erde sind seit ihrer Entstehung vor etwa 4.5Mrd Jahren erst zu rund der

Hälfte zerfallen. Schaut man also in der vergleichsweise kurzen Zeit eines Menschen auf 1g reines U-238 oder K-40, dann ändert sich diese Radioaktivität bzw. Zerfallsrate auch nicht spürbar. Bei manchen technisch hergestellten Radionukliden, die in Sekunden oder Minuten zur Hälfte zerfallen, kann man dagegen im Laufe einer Messung meist nicht von einer konstanten Zerfallsrate ausgehen.

Nimmt man aber mal eine konstante Zerfallsrate an, dann ist es an sich logisch, dass die Anzahl  $dN$  der pro Zeiteinheit  $dt$  zerfallenden Atome proportional zu der vorhandenen Anzahl  $N$  noch unzerfallener Kerne ist. Die Proportionalitätskonstante heißt Zerfallskonstante  $\lambda$  und kann mit  $\lambda = \ln(2)/T_{1/2}$  aus der Halbwertszeit berechnet werden. Mathematisch ausgedrückt ist das die relativ einfache Form einer Differentialgleichung, der sogenannten Zerfallsgleichung:

$$-dN/dt = \lambda N$$

welche sich mit der bekannten Formel:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

lösen lässt. Man kann die Zerfallsgleichung dadurch nachvollziehen, dass man von der Lösung die Ableitung bildet und sie in die Zerfallsgleichung einsetzt. Meist kennt man aber nur die Halbwertszeit  $T_{1/2}$ , so dass man die Berechnung am besten gleich mit diesen Parametern macht. Man kann leicht nachprüfen, dass nach einer Zeit  $T_{1/2}$  nur noch die Hälfte der ursprünglichen Kerne vorhanden ist (für die Zerfallenen ist ein Zerfallsprodukt, ein sog. Tochternuklid entstanden).

$$T_{1/2} = \ln(2) / \lambda = (1/2)^{1/\lambda}$$

Also ist:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\ln(2)/T_{1/2} \cdot t} = N(0) \cdot (1/2)^{t/T_{1/2}}$$

Das Minuszeichen in der Differentialgleichung ist nötig, da der Zerfall ja eine Verminderung der Anzahl noch vorhandener Ursprungs-Atome bedeutet. Man kann eine vergleichbare Gleichung für die Aktivität aufstellen, falls die Halbwertszeit so gering ist, dass man mit einer Abnahme der Zerfallsaktivität im Beobachtungszeitraum rechnen muss. Die Lösung lautet dann ganz vergleichbar:

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

Um auf das Beispiel des einen Gramms U-238 (Halbwertszeit  $T_{1/2} = 4,468 \cdot 10^9 \text{a}$ ) zurückzukommen, so bedeutet die Zerfallsgleichung, dass mit den anfänglich  $2.53031 \cdot 10^{21}$  Atomkernen des Uran eine anfängliche Aktivität  $A(0) = \ln(2)/(4.468 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) \cdot 2.53031 \cdot 10^{21} = 12447$  Zerfällen pro Sekunde entsteht, was soviel wie 12.4kBq bedeutet. Diese Aktivität nimmt dann auch so schnell nicht ab, wie man an dem Wert des Exponenten in der e-Funktion leicht ablesen kann.

Typischerweise enthält ein Natur-Uranerz aber höchstens etwa 10% Uran, dann hat 1g Erz unter der Annahme, es handelt sich zum größten Teil um U-238, eine durchschnittliche

Aktivität von 1000Bq. Für das K-40 berechnet man eine anfängliche Aktivität von  $\ln(2)/(1.277E9*365*24*3600)*6.0223E23/40 = 259138$  Zerfällen pro Sekunde. Da das K-40 Isotop aber nur zu 0.0117% im natürlichen Kalium enthalten ist (der Rest ist das stabile K-39) kommt man nur auf 30.32Bq pro Gramm. Für 1g reines Kaliumchlorid (KCl) aus der Apotheke hat man allerdings nur etwa 15Bq, da ja ein KCl Molekül wiederum aus zwei Atomen besteht, die etwa gleich schwer sind und nur das Kalium einen gewissen Anteil eines radioaktiven Isotops enthält.

Allerdings beginnt schon hier die Statistik. Diese Zusammenhänge gelten ja nur dann, wenn man eine große Zahl an Atomen anschaut. Das ist jedoch bei den kleinen Mengen von 1g durchaus noch berechtigt. Nun ist die Aktivität  $dN/dt$  im Falle des Uran oder Kalium in der Natur aber noch relativ überschaubar. Mit einem Geigerzähler kann man die einzelnen Zerfälle als unterscheidbare Klicks hören. Bei der Unmenge von Atomen in einem Gramm Uran ist daher die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines einzigen Atoms innerhalb 1 Sekunde am Ende doch äußerst gering. Das heißt man hat eine sehr geringe Zerfallswahrscheinlichkeit aber eine wahnsinnig hohe Anzahl an Atomen für die diese geringe Wahrscheinlichkeit gilt. Um genau zu sein, ist die Wahrscheinlichkeit  $q$ , dass ein einzelnes Atom in einem Zeitintervall  $t$  nicht zerfällt, also quasi seine individuelle Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$q = e^{-\lambda t}$$

Sie ist um so kleiner je größer die Zeitdauer  $t$  ist. Umgekehrt ist die Zerfallswahrscheinlichkeit  $p$  für ein einzelnes Atom in der Zeit  $t$  dann:

$$p = 1 - e^{-\lambda t}$$

Man muss also bei einem einzelnen Uran- bzw. Kaliumatom für  $t$  wirklich Milliarden Jahre einsetzen, dass man einen Effekt sieht. In einem Menschenleben ist diese Zerfallswahrscheinlichkeit und damit auch die Wahrscheinlichkeit, dass die darin steckende Energie frei wird, nahezu Null. Bei technisch erzeugten Radionukliden wäre das allerdings meist ganz anders. An dieser Stelle reden wir über die Statistik individueller Atome. Diese Wahrscheinlichkeit ist jedoch nur durch Betrachtung einer großen Zahl an Atomen gewonnen und eben statistisch auf ein einzelnes Atom heruntergerechnet.

Da der Zerfall eines einzelnen Kerns aber eine zufällige Angelegenheit ist und zum Rechnen wenig taugt, schaut man auch wieder die Zerfallsdauern vieler Atome an um die statistische Lebensdauer-Verteilung eines Atoms ganz generell und im statistischen Sinne zu bestimmen. Diese Verteilungsdichte hat ebenfalls eine negativ exponentielle Form. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lebensdauer  $t$  gilt dann:

$$p(0) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ für } t \geq 0$$

so dass für die Wahrscheinlichkeit  $P(T \leq t)$  also für den Zerfall innerhalb der Zeit  $t$  gilt:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Darin ist  $T$  die kontinuierliche Zufallsvariable für die Zerfallszeit und die Zeit  $t$  ihre Ausprägung im Einzelfall. Für die Lebensdauer, also das Überleben von mindestens der Zeit  $t$  gilt dann entsprechend:

$$P(T>t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$$

was identisch mit der oben angegebenen Überlebenswahrscheinlichkeit  $q$  ist.

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit für eine kurze Lebensdauer ist deutlich größer, als die für eine lange Lebensdauer, aber theoretisch kann die Lebensdauer sehr groß werden, wenn auch mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit. Das spiegelt den Sachverhalt wider, dass es im radioaktiven Zerfallsprozess kein „Gedächtnis“ gibt, d.h. es gibt keine Abhängigkeit von der Vorgeschichte wie zum Beispiel eine Alterung oder Kindersterblichkeit. Ein radioaktiver Atomkern „stirbt“ (zerfällt) unabhängig von seinem Alter. Der Mittelwert dieser Verteilung ist  $\mu=1/\lambda$ , das ist also quasi die mittlere Lebensdauer eines einzelnen radioaktiven Kerns. Die Verteilungsdichtefunktion mit dem Parameter  $\lambda$  beschreibt also das Schicksal der radioaktiven Kerne wirklich nur in statistischer Form. Für die Lebensdauer von Glühlampen gilt übrigens dieselbe Verteilung, man muss nur statt der Zerfallskonstante die mittlere Ausfallrate einsetzen.

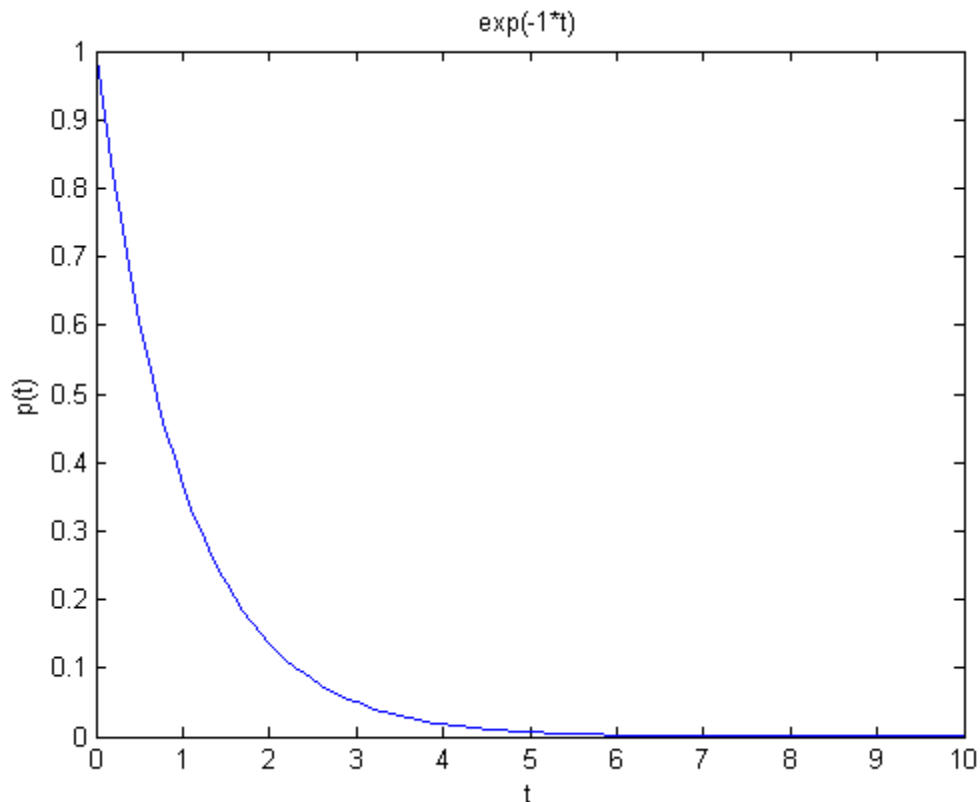


Abb. 1: Lebensdauer Verteilung eines radioaktiven Kerns mit einer Zerfallskonstante von  $\lambda=1$

Betrachtet man die Zeiten zwischen einzelnen Zerfallsereignissen bei einer radioaktiven Strahlungsquelle, die aus sehr vielen radioaktiven Kernen besteht und die Aktivität  $A$  hat, dann ist die zerfallsfreie Zeit  $t$  ebenfalls negativ exponentiell verteilt und es gilt für deren Dichte ganz analog:

$$p(t) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } p(t) = Ae^{-At} \text{ für } t \geq 0$$

Man nennt dieses Geschehen auch einen stochastischen Poisson-Prozess zu Ehren des französischen Mathematikers, der diese Mathematik erforscht hat. Darin ist nun die Aktivität  $A$  die charakteristische Konstante der Verteilungsdichtefunktion. Ganz analog kann man sich aber genauso auch an die Tür von Mac Donalds stellen und die Rate mit der die Leute reinkommen auszählen um so die Wahrscheinlichkeit für eine leere Kasse zu berechnen.

Der Mittelwert dieser negativ exponentiellen Verteilung ist nun  $\mu=1/A$  was nicht besonders verwunderlich ist. Das bedeutet schlichtweg, dass die mittlere Zeit zwischen zwei Zerfallsereignissen gerade der Kehrwert der Aktivität ist. Man sieht aber wieder, dass kurze Zeiten zwischen den Zerfallsereignissen viel häufiger sind als lange. In seltenen Fällen kann man also durchaus auch mal sehr lange auf den nächsten Klick des Geigerzählers warten müssen, da die e-Funktion auch für große  $t$  noch eine endliche, wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit ergibt.

Würde also ein Strahlungsdetektor alle Zerfälle erfassen können, würde das im Fall des einen Gramm 10%-igen Uranerzes bedeuten, dass die mittlere Zeit zwischen zwei Knacksen etwa 1ms betragen würde und bei 1 Gramm natürlichem Kalium immerhin schon 33ms. Denkt man sich nun um dieses 1g an untersuchter Probe eine Kugel mit dem Radius der Entfernung des Detektors und überlegt, welchen Anteil an der Oberfläche die aktive Detektorfläche hat, dann merkt man, dass man von den stattfindenden Zerfällen nur einen sehr kleinen Bruchteil sieht. Die Annahme dabei ist, dass es sich bei der 1g Probe um einen Punktstrahler handelt und die Strahlungsquanten gleichmäßig und radial in alle Richtungen abgestrahlt werden.

Eine BPW34 PIN-Diode hat beispielsweise  $7.45\text{mm}^2$  aktive Detektorfläche. Eine Kugel mit 10cm Radius hat  $4\pi \cdot 100 \cdot 100\text{mm}^2$  Fläche, was ein Faktor von 16868-mal mehr ist. Damit trifft ein Strahlungsquantum aus dem Uranzerfall der 1g Probe in 10cm Abstand theoretisch alle 16.9s den Detektor, während es im Falle des natürlichen Kaliums nur alle 9 Minuten einen Treffer gibt. Dazu müsste aber der Raum zwischen Probe und Detektor ein Vakuum sein, welcher die Strahlung nicht schwächt. Auf Grund der Luft dazwischen und der Kunststoffverpackung des Siliziumchips sieht man mit einer BPW34 Diode in der Praxis überhaupt nichts vom Alpha-Zerfall des Urans sondern vor allem die Betaquanten, die vom Zerfall der Folgeprodukte stammen und auch beim Kalium ist in 10cm Abstand die Betastrahlung in Luft schon deutlich geschwächt. Das Kalium generiert bei seinem Zerfall in 11% der Fälle noch ein Gammaquantum, das man mit einer PIN-Diode dann auf Grund der hohen Energie aber nicht mehr wahrnehmen kann. Damit wird auch klar, dass zwischen der berühmten Knacksrate eines Geigerzählers, die man hört und der Aktivität in Bq doch ein kräftiger Unterschied besteht.

Aber aus der Überlegung mit der Kugeloberfläche wird auch schnell klar, dass der Vorteil der PIN-Diode derjenige ist, dass man deutlich näher an die 1g Probe ran kann und dabei eine massive Zunahme der detektierten Zerfallsrate mit dem Quadrat des Kehrwerts der Entfernung sieht. Beim Zählrohr hat das rein von der Geometrie her ein Ende, weil dann die Probe nicht mehr die ganze Wand des Zählrohrs „ausleuchten“ kann. Dafür ist aber beim Zählrohr von vorneherein die Zählrate aufgrund der größeren aktiven Fläche deutlich höher als bei der PIN-Diode.

Geht man nun zurück zum Einzelschicksal eines zerfallenden Kerns, dann ist natürlich schnell die Frage, wenn  $p = 1 - e^{-\lambda T}$  die Zerfallswahrscheinlichkeit eines einzelnen Kerns ist, wie groß

dann die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine abzählbare Menge  $k$  von anfänglich  $N$  Kernen in einem gewissen Zeitraum  $t$  zerfallen? Durch einen Grenzübergang von  $N \rightarrow \infty$  könnte man so auch die Wahrscheinlichkeit für eine große Menge an Kernen berechnen. Hat man die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen Kern und nimmt an, dass der Zerfall der Kerne voneinander statistisch unabhängig ist, d.h. dass jeder das gleiche Schicksal hat, dann kann man die Zerfallswahrscheinlichkeit für  $N$  Kerne mit der Binomialverteilung angeben. Das ist also dasselbe, wie wenn man eine Münze mit Wappen und Zahl  $N$  mal hintereinander wirft und aufschreibt, wie oft man die Zahl gesehen hat. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Zerfälle aus  $N$  Atomen:

$$P_B(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$\binom{N}{k}$  ist die mathematische Ausdrucksweise für das Berechnen der Binomialkoeffizienten. Ein Binomialkoeffizient berechnet sich dabei wie folgt:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! (N-k)!}$$

Was für kleine  $N$  und  $k$  herauskommt wird oft auch im sogenannten Pascal'schen Dreieck dargestellt, das man noch leicht durch Überlegen iterativ herausbekommen kann. Der Mittelwert  $\mu$  der Binomialverteilung ist  $\mu = N \cdot p$  und die Streuung  $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}$ .

Abgekürzt geschrieben wird die Binomialverteilung oft als  $P_B(k; N, p)$ , da sie ja bereits durch  $N$  und  $p$  vollständig festgelegt ist. Diese Schreibweise verbirgt ein wenig den Ärger, den man mit einem Computer hat, wenn er  $P_B$  auch für große  $N$  ausrechnen können soll. Es müssen dann große Fakultäten berechnet werden und da tun sich Computer immer schwer damit, denn  $10!$  ist immerhin schon die Zahl 3628800 und  $100!$  ist ungefähr  $9.3326e+157$ . Es ist nun der Verdienst des Herrn Poisson, der erkannt hat, dass es Fälle gibt (wie beim radioaktiven Zerfall) wo die Zahl  $N$  der Atome gegen unendlich geht aber deren Zerfallswahrscheinlichkeit  $p$  so klein ist, dass das Produkt  $N \cdot p$  trotzdem endlich bleibt. Für diesen Fall kann man mit etwas Mathematik zeigen, dass man die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Zerfälle aus  $N$  Atomen berechnen kann, ohne dass man die Fakultät  $N!$  braucht, die Berechnung der Fakultät  $k!$  reicht bereits aus. Das heißt, man kann die Binomialverteilung  $P_B(k)$  unter diesen Umständen sehr gut mit der Poisson-Verteilung  $P_P(k)$  annähern:

$$P_B(k; N, p) = P_P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad \text{wenn gilt: } N \rightarrow \infty \text{ und } N \cdot p \text{ endlich}$$

Dabei ist  $\mu$  der Mittelwert der sich aus  $\mu = N \cdot p$  im Grenzfall ergeben würde. Dividiert man den so entstehenden Mittelwert an Ereignissen durch das Beobachtungsintervall  $t$ , so muss ja die mittlere Aktivität entstehen, also  $\mu/t = A$ . Wenn man daher die Aktivität  $A$  kennt, ist mit  $\mu = A \cdot t$ , die Poisson-Verteilung vollständig bestimmt. Der Mittelwert stellt eine mittlere Zahl Ereignisse dar und ist daher dimensionslos.

Wenn  $k$  die im Beobachtungszeitraum gezählte Anzahl an Zerfällen ist und  $t$  die Beobachtungsdauer war, dann kann man den Mittelwert aus dieser Stichprobe grob abschätzen:  $k \approx \mu = A \cdot t$ . Wiederholt man dieses Experiment und berechnet daraus den Mittelwert für die verschiedenen Ergebnisse von  $k$ , so wird das geschätzte  $\mu$  natürlich immer genauer.

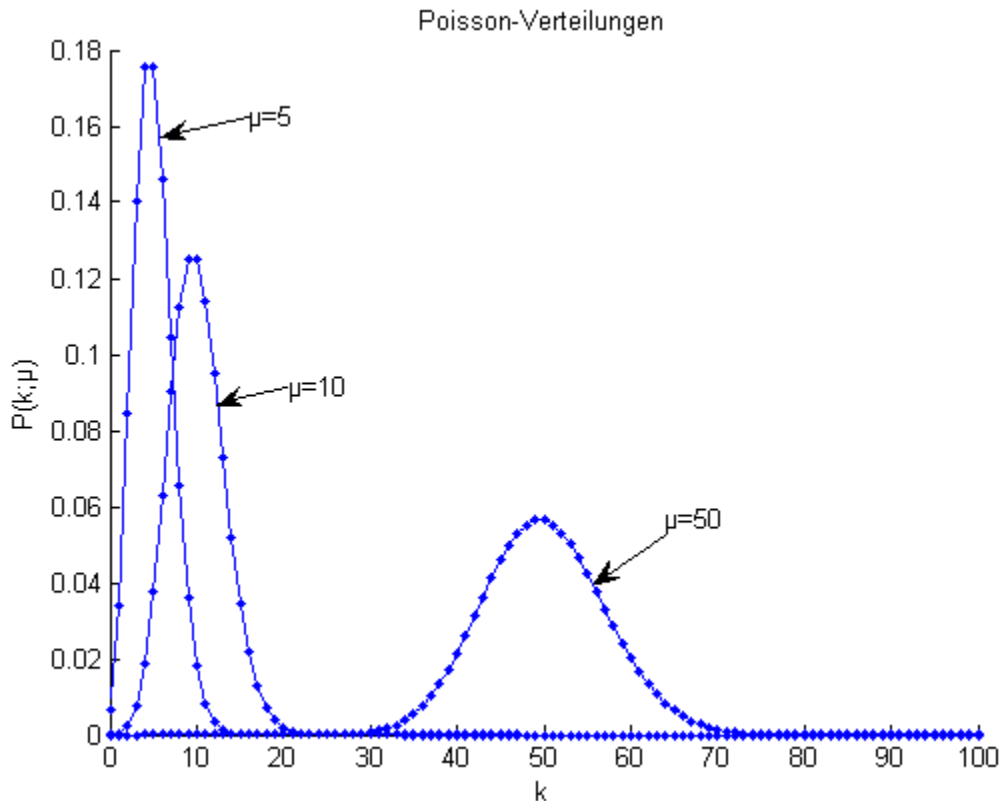


Abb. 2: Poisson-Verteilungen für verschiedene Mittelwerte (Erwartungswerte)

Die interessante Frage ist nun, wenn ich Ereignisse, wie z.B. die Clicks eines Geiger-Zählers habe, die in Abständen eintreffen, die mit einer mittleren Rate von  $R$  negativ exponentiell verteilt sind, was kann man dann über die Statistik des Prozesses sagen, bei dem ich die Anzahl  $k$  der Ankunftszeitpunkte solcher Ereignisse mit negativ exponentiellen Abständen einfach hintereinander in einem gewissen Zeitintervall anschau? Denn das ist ja genau die Messaufgabe beim Bestimmen einer mittleren Impulsrate, nämlich eine gewisse Messzeit abzuwarten zu schauen wie viele Impulse fallen in diese Messzeit. Auch auf diese Frage hat der Herr Poisson eine Aussage geliefert. Zu seinen Ehren nennt man so einen Ankunftsprozess von nacheinander eintreffenden Ereignissen mit negativ exponentiell verteilten Abständen einen Poisson-Prozess und die Aussage ist, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von  $k$  Ereignissen in der Messzeit  $T$ , wenn die mittlere Ankunftsrate des Prozesses der Impulse  $R$  beträgt, ist dann nämlich mit  $P_P(k;R) = R^k e^{-R} / k!$  entsprechend der Poisson-Verteilung verteilt und die Impulsrate  $R$  entspricht dem Mittelwert  $\mu$ .

Eine interessante Eigenschaft der Poisson-Verteilung ist aber auch ihre Streuung, die sich mit  $\sigma = \sqrt{\mu}$  ergibt. In anderen Worten: kennt man den Mittelwert, kennt man auch gleich die Streuung. Streuung und Mittelwert sind also nicht unabhängig voneinander, so wie das z.B. bei einer Gaußschen Normalverteilung der Fall ist. Man braucht daher nur einen Parameter um die Verteilung zu beschreiben. Ein anderes wichtiges Merkmal der Poisson-Verteilung ist, dass sie für kleine  $\mu$  stark unsymmetrisch wird, da man ja nicht weniger als  $k=0$  Ereignisse erwarten kann, umgekehrt aber kann  $k$  gegen unendlich gehen d.h. auch für große Werte von  $k$  ergibt sich noch eine gewisse, wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit.

Wenn man umgekehrt mit einem Detektor im Mittel  $n=10$  Pulse abzählt und dann aus der dafür benötigten Zeit die Zählrate  $R$  berechnet, dann wird das Ergebnis erheblich streuen, weil

eben auch die Wahrscheinlichkeit, dass 10 Impulse in ein gewisses Zeitintervall  $t$  fallen mit  $\sigma = \sqrt{10}$  streut. Das Ergebnis ist also  $R = (10 \pm \sqrt{10})/t$ . Wartet man dagegen die Zeit für 100 Pulse ab, so bekommt man  $R = (100 \pm \sqrt{100})/t$ . Durch die Wurzelfunktion wird das Ergebnis daher immer genauer, je mehr Impulse man abwartet um die Zählrate zu bestimmen. Allgemein gilt für die Genauigkeit einer Zählrate  $R$ , die oft als Maß für die gemessene Aktivität benutzt wird:

$$R = (n \pm \sqrt{n})/t = R \pm R/\sqrt{n}$$

sofern sie aus  $n$  Zählimpulsen mit negativ exponentiell verteiltem Abstand bestimmt wurde. Als Genauigkeitsmaß wurde hier die einfache Streuung  $1 \cdot \sigma$  der Poisson-Verteilung benutzt. Diese Möglichkeit der Genauigkeitsabschätzung ist also ein ganz wichtiges Ergebnis all dieser statistischen Betrachtungen.

Es wäre aber genau genommen nicht ganz richtig, wenn man z.B. genau 10 Zerfallsereignisse abwartet und dann der dafür gemessenen Zeit jetzt auch eine Poisson-Verteilung unterstellen würde. Denn die Poisson-Verteilung beschreibt ja die Wahrscheinlichkeit das  $k$  Ereignisse der Zeit  $t$  stattfinden und nicht, dass die Zeit für  $k$  Ereignisse  $t$  beträgt. Das ist ein feiner Unterschied. Denn wann genau das  $k$ -te Ereignis in der Zeit  $t$  bei der Poisson-Verteilung eintritt ist ja offen, es dürfen nur nicht  $k+1$  oder  $k-1$  Ereignisse sein, die in die Zeit  $t$  fallen. Außerdem misst die Poisson-Verteilung ja Ereignisse und ihr Mittelwert hat nicht die Dimension einer Zeit.

Um diesen feinen Unterschied hat sich ein dänischer Mathematiker mit dem Namen Erlang gekümmert und hat die Wahrscheinlichkeit für die Zeit  $t$  angegeben, die es braucht, bis gerade genau  $k$  Ereignisse eingetroffen sind. Er hat das im Zusammenhang mit der Dimensionierung von Telefonanlagen benötigt, bei der die  $k$  Teilnehmer in einer Warteschlange warten müssen, bis eine Leitung frei wird. Dabei ist das Eintreffen der einzelnen Rufe genauso negativ exponentiell verteilt, wie die Zeiten zwischen den einzelnen radioaktiven Zerfallsereignissen und es geht nun darum herauszufinden, wie dann die Summe von  $k$  solchen Einzel-Zeiten verteilt ist. Durch mathematische Faltung der  $k$  negativ exponentiellen Einzel-Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergibt sich so die sogenannte Erlang-Verteilung  $E(A, k)$ , wobei man hier jetzt als Rate der Ereignisse die Aktivität  $A$  benutzen muss, da ja die Zeit zwischen den Zerfallsereignissen vom Zerfall vieler Atome bestimmt wird. Oft wird in der Mathematik die Ausfallrate oder die Ankunftsrate dummerweise mit  $\lambda$  bezeichnet und in Zusammenhang mit der Erlang-Verteilung als  $E(\lambda, k)$  benutzt. Dies ist aber ein anderes  $\lambda$  als das der radioaktiven Zerfallskonstante.

$$p(t) = \begin{cases} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-At} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Es ist jetzt natürlich logisch, dass wenn man auf genau  $k$  Ereignisse wartet, dass dann der Mittelwert dieser Verteilung  $\mu_t = k/A$  sein muss, da ja der Mittelwert für die Zeit zwischen den Ereignissen  $1/A$  ist. Dieser Mittelwert  $\mu_t$  hat jetzt also die Dimension einer Zeit. Die Aktivität



ergibt sich nun aus der Zahl  $k$  der Ereignisse dividiert durch die im Mittel benötigte Zeit  $k/\mu_t = k/(k/A) = A$ , die man für genau diese  $k$  Ereignisse warten muss. Das bedeutet, die aus den Mittelwerten der Poisson- und Erlang-Verteilungen berechnete Aktivität ist identisch. D.h. es ist egal, ob man die Zeit vorgibt und zählt wie viele Ereignisse eintreten, oder ob man die Zahl der Ereignisse vorgibt, die eintreten müssen und die Zeit dafür misst.

Rechnet man aber die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für die erwarteten Zeiten mit der Erlang-Verteilung aus und vergleicht sie mit einer Poisson-Verteilung mit einem Mittelwert von  $\mu = k \cdot A$ , sieht man einen kleinen Unterschied.

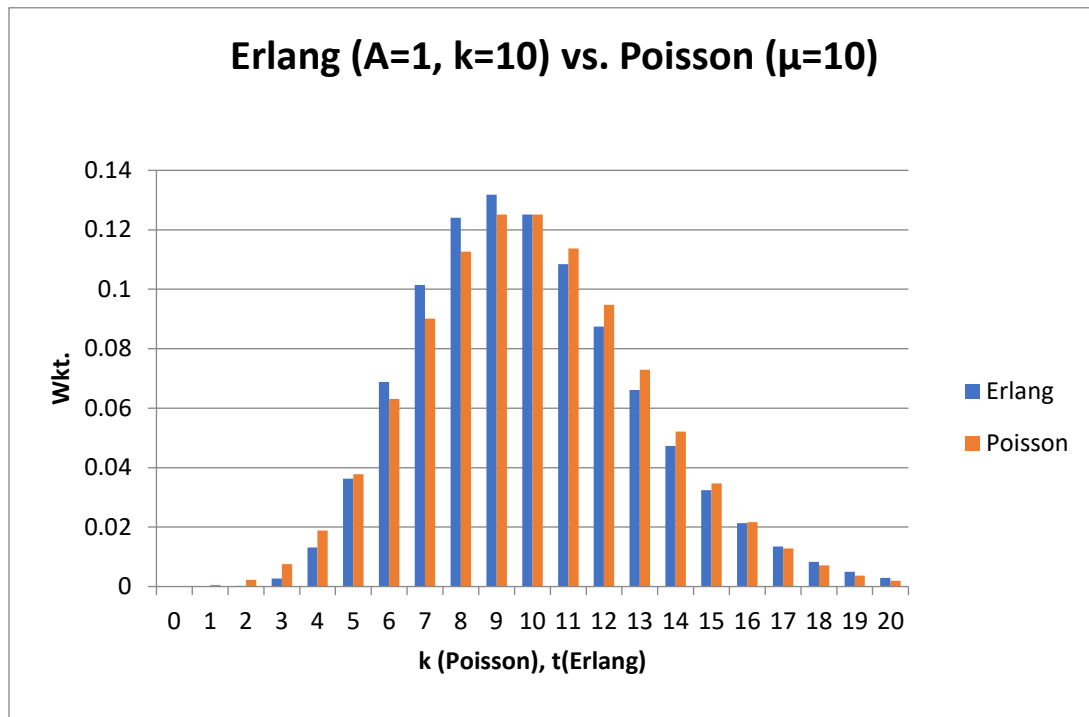


Abb. 3: Vergleich einer Erlang-Verteilung  $E(A=1, k=10)$  Verteilung mit einer Poisson-Verteilung mit Mittelwert  $\mu=10$

Die Streuung der Erlang-Verteilung beträgt  $\sigma = 1/A \cdot \sqrt{k}$ , was auch wieder besagt, dass die Zeit  $t$  aus der die Aktivität mit  $A = k/\mu_t$  berechnet werden kann, eigentlich mit einem Mittelwert und einer Streuung angegeben werden müsste, so dass gilt:

$$A = k/\mu_t \pm k/\sigma_t = A \pm A/\sqrt{k}$$

Wenn man nun statt der Aktivität die Zählrate nimmt und statt  $k$  die Variable  $n$ , dann landet man wieder bei  $R \pm R/\sqrt{n}$  als Genauigkeitsangabe für die Zählrate, auch wenn genau genommen eine Erlang Verteilung das Geschehen beschreibt, wenn man die Anzahl vorgibt und die Zeit misst und nicht umgekehrt wie bei der Poisson-Verteilung.

Wenn man sich nun die Gestalt der diskreten Poisson-Verteilung anschaut und die erwartete Zahl an Ereignissen  $\mu$  immer größer werden lässt, dann erkennt man leicht, dass diese der Gestalt einer Verteilungsdichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung immer ähnlicher wird (bei der Erlang-Verteilung gilt für ein großes  $k$  dasselbe). Schon für eine erwartete Zahl von beispielsweise  $\mu=30$  erwarteten Zählimpulsen kann man sie von der Glockenform der

Normalverteilung kaum noch unterscheiden. Das macht die Sache dann vollends einfach, weil man jetzt statt der Poisson-Verteilung auch die Verteilungsdichtefunktion der Normalverteilung benutzen kann, mit all ihren Konsequenzen. Man verwendet daher oft die Gaußsche Verteilungsdichtefunktion  $p_N(k; \mu, \sigma)$  mit dem selben  $\mu$  aber einer Streuung von  $\sigma = \sqrt{\mu}$  :

$$P_P(k; \mu) = p_N(k; \mu, \sigma = \sqrt{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-(\mu-k)^2/2\mu}, \text{ wenn gilt } \mu > 30$$

Nützliche Funktionen in Zusammenhang mit der Gaußverteilung sind dann in den meisten Mathematik- und Tabellenkalkulationsprogrammen enthalten und man muss nichts mehr mühsam und fehlerbehaftet von Hand rechnen.

Auf die Praxis des Pulse-Zählens bezogen bedeutet das, dass man für eine Zählrate  $R$ , die z.B. aus 100 Pulsen und mehr abgeschätzt wird, durchaus guten Gewissens die Vertrauens- bzw. Konfidenzintervalle der Gaußschen Statistik annehmen kann. Für  $n=100$  Pulse bedeutet das, dass bei einer ermittelten Zählrate  $R=n/t$  mit 68%-iger Sicherheit davon ausgegangen werden kann, dass die tatsächliche Zählrate bei  $R \pm R/\sqrt{100} = R \pm R/10$  liegt und mit 95%iger Sicherheit bei  $R \pm 2*R/10$  und wer noch weniger Risiko eingehen will, der kann mit 99.7%-iger Sicherheit behaupten, dass die tatsächliche Zählrate im Bereich von  $R \pm 3*R/10$  liegen wird (das Konfidenz-Intervall für  $3*\sigma$ ). Die Zahl  $n$  ist hier jetzt ein erwartungstreuer Schätzwert für den Zerfall von  $\mu$  Atomen im Zeitraum  $t$ . Den Zerfall der Grundgesamtheit kann und muss man hoffentlich selten abwarten. Zumindest bei den primordialen Radionukliden würde das nämlich astronomisch lange Messdauern bedeuten.

Man kann aber aus dieser Betrachtung deutlich sehen, dass es aus statistischer Sicht eigentlich absolut notwendig ist anzugeben, aus wie vielen Pulsen eine Zählrate bestimmt wurde, die später als Maß für eine gemessene Radioaktivität oder Dosisleistung dienen soll. Die Genauigkeit der Umrechnung von Zählrate in Aktivität bzw. Dosisleistung ist dann aber nochmals ein Kapitel für sich. Besser ist es natürlich, wenn man den Detektortyp und die Messdauer angeben kann und der Hersteller ein Datenblatt liefert, welches deutlich genug sagt, wie hoch die Zählrate bei einer gewissen Radioaktivität in Becquerel eines Punktstrahlers in einem gewissen Abstand oder bei einer normengerecht gemessenen Dosisleistung ist. Die erzielten Messwerte gelten dann aber meist nur für ein bestimmtes Radionuklid, welches im Datenblatt genannt ist (meist Cs-137). Alle Messwerte ohne eine solche Angabe zur Zählstatistik sind dagegen nur grobe Hausnummern, bei denen man höchstens in positiver Weise unterstellen kann, dass die Messdauer so lang war, dass die Streuung vernachlässigbar ist.

Die hier gemachten Überlegungen kann man durchaus auch mit einem Mathematikprogramm oder Tabellenkalkulationsprogramm wie MS Excel nachsimulieren um den Zusammenhang besser zu verstehen. Das Problem ist zunächst aber meist, dass diese nur einen Zufallszahlengenerator für gleichverteilte Zahlen zwischen 0 und 1 haben. Eine negativ exponentiell verteilte Zufallszahl gibt es meist nicht. Man kann sich dann aber damit behelfen, dass man gleichverteilte Zufallszahlen  $y_i$  zwischen 0 und 1 generiert und diese als Argument für die inverse Verteilungsfunktion (nicht die Dichte) benutzt. Im Falle der Exponentialverteilung ist das  $x_i = -\ln(1-y_i)/\lambda$ . Wenn also  $y_i$  zwischen 0 und 1 gleichverteilt ist, ist, dann ist  $x_i$  negativ exponentiell verteilt mit dem Parameter  $\lambda$ . Diese so erzeugten Zahlen kann man benutzen um die zufälligen Zeitpunkte einzelner Zerfälle in einer Strahlungsquelle

auch in Software nachzubilden. Das Zählen und Berechnen der Zählraten sowie ihrer Statistik können damit, wie später in einem Messgerät vorgesehen, schon mal vorab in Software implementiert und getestet werden.

Wenn man dann ein Messgerät schließlich selbst baut, dann empfiehlt es sich, auch mal nachzuprüfen, ob die oben angegebenen statistischen Eigenschaften der Zählimpulse und Zählraten erfüllt sind, zumindest die Tatsache, dass die Streuung ungefähr einen Wurzelzusammenhang zum Mittelwert hat, denn Zählimpulse müssen in selbstgebaute Elektronik nicht notwendigerweise ausschließlich von radioaktiver Strahlung herrühren.

## **Literatur**

/1/ Ansgar Steland  
Basiswissen Statistik  
Springer Verlag 2013

/2/ Bronstein, Semendjajew  
Taschenbuch der Mathematik  
Verlag Harri Deutsch 1980

/3/ Athanasios Papoulis  
Probability, Random Variables and Stochastic Processes  
Mac Graw Hill 1965

/4/ Exponentialverteilung  
<http://massmatics.de/merktzettel/index.php#!859:Exponentialverteilung>