Aktivitätsverlauf und Gleichgewicht bei der Radonentstehung in einem gegebenen Volumen

Bernd Laquai, 26.12.2012

Die Aussage des Zerfallsgesetzes ist, dass die Menge N an Kernen welche zerfällt (abnimmt) proportional zu der Anzahl noch existierender Kerne ist:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

Die gleich Aussage gilt auch für die spezifische Aktivität A(t), also die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne eines Radionuklids, gemessen in [Bq]:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda A(t)$$

Die Proportionalitätskonstante λ wird Zerfallskonstante genannt. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine einfache homogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dA(t)}{dt} + \lambda A(t) = 0$$

Mit der Lösung:

$A(t)=A_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Anstelle der Zerfallskonstante wird häufig die Halbwertszeit $T_{1/2}$ verwendet, wobei folgender Zusammenhang gilt:

$\lambda=\ln(2)/T_{1/2}$

Ein radioaktives Gleichgewicht stellt sich dann ein, wenn die Halbwertszeit eines Tochternuklids deutlich kleiner ist als die des Mutternuklids. Dann nämlich ist die Aktivität des Mutternuklids zu Lebzeiten des Tochternuklids nahezu konstant. Existiert das Tochternuklid zu Beginn der Betrachtung noch nicht, dann baut sich dessen Konzentration solange auf bis die Aktivität des Tochternuklids der des Mutternuklids entspricht und sich das Gleichgewicht so eingestellt hat, dass für jedes zerfallende Mutternuklid ein Tochternuklid entsteht, welches nach kurzer Zeit ebenfalls zerfällt, d.h. beide Aktivität gleich sind.

Dies ist beispielsweise beim Radium-226 Mutternuklid mit $T_{1/2}$ = 1602a und seinem Tochternuklid Radon-226 der Fall mit $T_{1/2}$=3.82d . Mathematisch bedeutet das, dass die Änderung der Aktivität des Radons dadurch zustande kommt, dass Radon einerseits aus dem Zerfall des Radium proportional zur konstanten Radiumaktivität entsteht und anderseits das Radon wieder selbst proportional zu seiner eigenen momentanen Aktivität zerfällt:

$$\frac{dA_{Rn}(t)}{dt} = \lambda_{Ra}A_{Ra} - \lambda_{Rn}A_{Rn}(t)$$

In dieser Gleichung ist nun die Radiumaktivität A_{Ra} eine Konstante während A_{Rn} sich zeitlich verändert. Man hat nun also die folgende inhomogene Differentialgleichung zu lösen:

$$\frac{dA_{Rn}(t)}{dt} + \lambda_{Rn}A_{Rn}(t) = \lambda_{Ra}A_{Ra}$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung hat die selbe Bauart wie beim reinen Zerfall:

$$\frac{dA_{Rn}(t)}{dt} + \lambda_{Rn} \cdot A_{Rn}(t) = 0$$

mit der Lösung:

$$A_{Rn}(t) = Ke^{-\lambda_{Rn}t}$$

Nun muss allerdings noch eine partikuläre Lösung für die inhomogene Differentialgleichung mit Hilfe der Randbedingungen gefunden werden. Ausgehend von der Annahme, dass sich nach unendlicher Zeit eine feste Gleichgewichtsaktivität A_∞ einstellt, die der Radiumaktivität A_{Ra} entspricht, kann man folgenden Ansatz machen:

$$A_{Rn}(t) = Ke^{-\lambda_{Rn}t} + A_{Ra}$$

für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich somit $A_{Rn}(\infty) = A_{Ra}$. Wenn nun für t = 0 die Aktivität des Radons als 0 angenommen wird ergibt sich:

$$A_{Rn}(0) = K + A_{Ra} = 0$$

d.h. $K = - A_{Ra}$. Damit lautet die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$A_{Rn}(t) = -A_{Ra}e^{-\lambda_{Rn}t} + A_{Ra} = A_{Ra}(1 - e^{-\lambda_{Rn}t})$$

Der Anstieg der Radonaktivität bei t=0 erfolgt daher mit:

$$A'_{Rn}(t=0) = A_{Ra} \cdot \lambda_{Rn} = A_{Ra} \cdot \frac{\ln(2)}{T_{1/2}^{Rn}}$$

Das bedeutet, dass der Anstieg der Radonaktivität ebenfalls exponentiell mit der Zerfallskonstante des Radons erfolgt, der allerdings mit der in diesem Zeitraum als konstant angenommenen Radiumaktivität gewichtet ist.

Für t > 0 gilt für den Anstieg der Radonaktivität:

$$A'_{Rn}(t) = A_{Ra}\lambda_{Ra} \cdot e^{-\lambda_{Rn}t}$$

oder logarithmiert:

$\ln(A'_{Rn}(t)) = \ln(\lambda_{Rn}) + \ln(A_{Ra}) - \lambda_{Rn} \cdot t$

was eine Geradengleichung darstellt. Damit lässt sich sowohl die Gleichgewichtsaktivität A_{Ra} als auch die Zerfallskonstante λ_{Rn} aus der Steigung nahe dem Nullpunkt und den Daten eines Messwerts für t > 0 bestimmen:

$$\lambda_{Rn} = \frac{\ln(A'_{Rn}(t = t_0) - \ln(A'_{Rn}(t = t_1)}{t_1 - t_0}$$

$$A_{Ra} = e^{(\ln(\frac{A'_{Rn}(t=t_1)}{\lambda_{Rn}}) + \lambda_{Rn} \cdot t_1)}$$

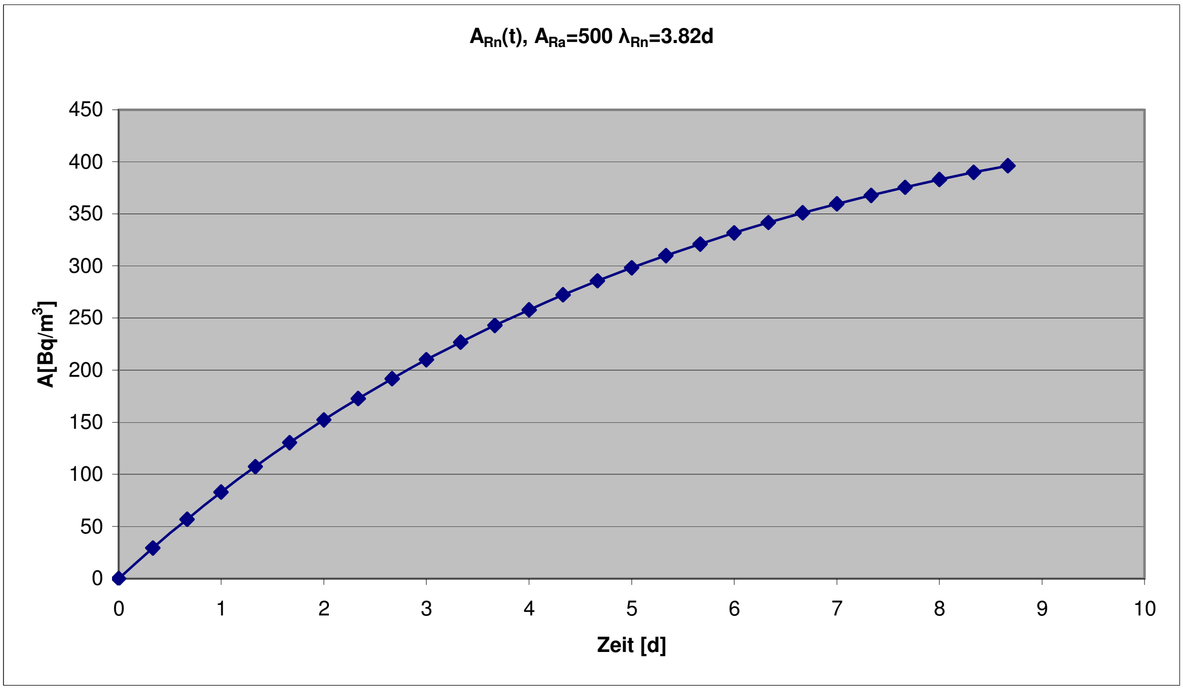
Das aber bedeutet, dass man nur einen Teil des Radon-Aktivitätsaufbaus abwarten muss, um den Endwert abschätzen zu können und um die Sicherheit zu haben, dass es sich auch wirklich um Radon handelt.

Genauso kann man natürlich auch eine Regressionsgerade an die logarithmierte Ableitung der Radonaktivität über der Zeit anpassen um die Zerfallskonstante λ_{Rn} (Steigung) und die Gleichgewichtsaktivität A_{Ra} aus dem Achsenabschnitt zu berechnen. Dies hat den Vorteil, dass durch die Regression die statistische Sicherheit höher ist.

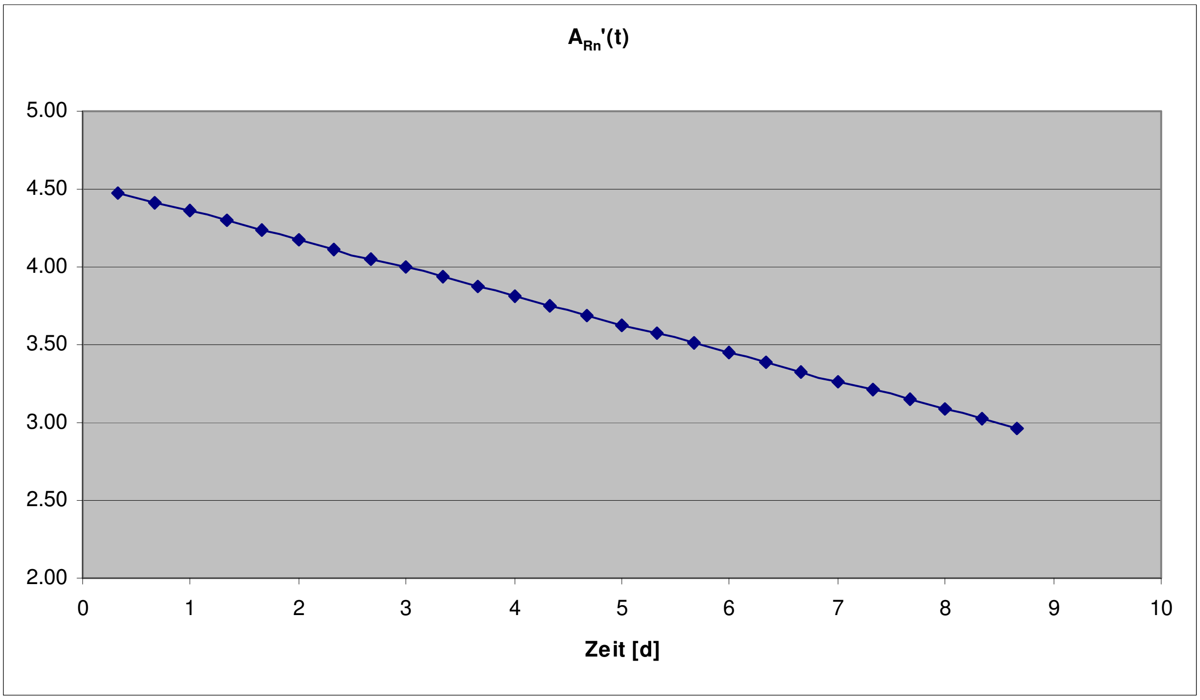
Noch einfacher wird die Abschätzung der Gleichgewichtsaktivität A_{Ra} wenn man von vorneherein die Zerfallskonstante λ_{Rn} als bekannt unterstellt. Dann genügt es den Mittelwert über alle Messwerte der Schätzfunktion zu berechnen:

$$A_{Ra} = Mittelwert\left\{\frac{A_{Rn}(t_i)}{\left(1 - e^{-\lambda_{Rn} \cdot t_i}\right)}\right\}$$

t_i sind dabei die Zeitpunkte an denen eine Aktivitätsrate des Radons bestimmt wurde und $A_{Rn}(t_i)$ sind die entsprechenden Messwerte.



Beispiel eines simulierten Radon-Aktivitätsanstieg



Zugehörige logarithmierte Ableitung des Aktivitätsverlaufs