

Alles im Gleichgewicht – oder etwa nicht ?

Berechnung und Simulation von Aktivitäten aus natürlichen Zerfallsketten

Bernd Laquai, 30.5.2015

Sofern der Mensch nicht eingreift, dann herrscht in der Natur (ohne Mensch) normalerweise ein Gleichgewicht. So ist das auch beim radioaktiven Zerfall. Es gibt im Wesentlichen nur 3 Elemente mit in der Natur vorkommenden radioaktiven Isotopen, welche auf Grund ihrer sehr langen Halbwertszeit die bisherige Evolution der Erde überlebt haben. Das ist das Kalium-40, das Uran und das Thorium (es gibt allerdings auch noch einige seltene Erden, die auch überlebt haben). Das sind die sogenannten primordialen Radionuklide. Während das radioaktive Kalium-40 Isotop, welches im natürlichen Kalium zu 0.012% enthalten ist, in das stabile Kalzium oder in das stabile Argon zerfällt, zerfallen die beiden radioaktiven Uranisotope, welche im natürlichen Uran enthalten sind (U-238 99.27% U-235 0.72%), sowie das natürlich radioaktive Thorium erst über lange Zerfallsreihen in stabile Elemente. Die Zwischenstufen in den Zerfallsreihen sind ebenfalls radioaktive Isotope verschiedener Elemente mit ihren unterschiedlichen Halbwertszeiten, Strahlungsarten und Strahlungsenergien.

Deswegen ist es auch so, dass wenn man sich ein natürliches Stück Uranerz anschaut, oder das Radon-haltige Wasser einer entsprechenden Quelle untersucht, dass man dann einen bunten Blumenstrauß an verschiedensten Radionuklide findet und die Gesamt-Aktivität der Probe bei weitem nicht der chemischen Urankonzentration bzw. Radonkonzentration entspricht.

Isoliert man dagegen ein Radionuklid, und das ist beim Radon beispielsweise aufgrund seines gasförmigen Aggregatzustands bei hoher Temperatur ganz leicht möglich, dann kann man beobachten wie die Natur mehr oder weniger schnell die Gleichgewichte wieder herzustellen versucht, wie auf einer Wiese auf der man zunächst nur eine Blume ausgesät hat aber auf der nach einigen Jahren wieder eine bunte Mischung an Blumen zu Hause ist.

Da beim radioaktiven Zerfall aber doch die Gesamtaktivität davon betroffen ist, wie sich entlang der Zerfallskette wieder die Zerfallsprodukte bilden lohnt sich doch auch ein quantitativer Blick auf diesen Gleichgewichtsmechanismus.

Betrachtet man G Folgegenerationen eine Muttergeneration (Index 0), dann kann man für jede die bekannte Zerfallsgleichung aufstellen. Für die Muttergeneration gilt dann:

$$dN_0/dt = -\lambda_0 * N_0$$

Geht man gleich auf die Aktivität über in dem man einfach beide Seiten mit der Zerfallskonstante multipliziert, dann hat man es später einfacher, da gewöhnlich keine Atomzahlen angegeben werden wenn man über Radioaktivität redet. Für die Muttergenerationen und ihre Folgegenerationen (Tochter, Enkel, Urenkel ...) gilt daher ganz vergleichbar:

$$dA_0/dt = -\lambda_0 * A_0$$

$$dA_1/dt = \lambda_0 * A_0 - \lambda_1 * A_1$$

...

$$dA_G/dt = \lambda_{G-1} * A_{G-1} - \lambda_G * A_G$$

Es handelt sich also um ein System von Differentialgleichungen die verkettet sind. Hierin sind die λ_i die Zerfallskonstanten der Radionuklide, und die A_i die zeitabhängigen Aktivitäten der i-ten Generation ($i=0$ Mutter). Dafür haben die Mathematiker eine rekursive Lösung gefunden:

$$K_{0,0} = A_0(0)$$

$$K_{i,j} = K_{i-1,j} * \lambda_i / (\lambda_i - \lambda_j) \quad i=1 \dots G, j = 0 \dots i-1$$

$$K_{i,i} = A_0(0) - (K_{i,0} + K_{i,1} + K_{i,2} + \dots + K_{i,i-1}) \quad i=1 \dots G$$

$$A_0(t) = K_{0,0} * e^{-\lambda_0 * t}$$

$$A_1(t) = K_{1,0} * e^{-\lambda_0 * t} + K_{1,1} * e^{-\lambda_1 * t}$$

$$A_2(t) = K_{2,0} * e^{-\lambda_0 * t} + K_{2,1} * e^{-\lambda_1 * t} + K_{2,2} * e^{-\lambda_2 * t}$$

...

$$A_G(t) = K_{G,0} * e^{-\lambda_0 * t} + K_{G,1} * e^{-\lambda_1 * t} + K_{G,2} * e^{-\lambda_2 * t} + \dots + K_{G,G} * e^{-\lambda_G * t}$$

Die Lösungen sind also überlagerte Exponentialfunktionen. Die $K_{i,j}$ sind Konstanten für die i-te Generation und die j-te Exponentialfunktion, die man bei der Überlagerung braucht.

Da zu einem Radionuklid auch selten die Zerfallskonstante λ angegeben wird sondern eher die entsprechende Halbwertszeit T_h kann man mit $\lambda = \ln(2)/T_h$ eine passende Umformung erreichen. Interessant ist, dass dabei aus der Exponentialfunktion eine Potenzfunktion zur Basis 2 wird:

$$K_{i,j} = K_{i-1,j} * T_{h_j} / (T_{h_j} - T_{h_i})$$

$$A_0(t) = K_{0,0} * 2^{-t/T_{h0}}$$

...

$$A_G(t) = K_{G,0} * 2^{-t/T_{h0}} + K_{G,1} * 2^{-t/T_{h1}} + K_{G,2} * 2^{-t/T_{h2}} + \dots + K_{G,G} * 2^{-t/T_{hG}}$$

Für das System Mutter-Tochter kann man nach Auflösung der Gleichungen leicht eine geschlossene Lösung finden, die auch die Anfangskonzentrationen $A_i(0)$ der Aktivität der i-ten Generation an Folgeprodukt berücksichtigt:

$$A_0(t) = A_0(0) * 2^{-t/Th_0}$$

$$A_0(t) = A_0(0) * Th_r * 2^{-t/Th_0} + (A_1(0) - A_0(0) * Th_r) * 2^{-t/Th_1}$$

mit:

$$Th_r = Th_0 / (Th_0 - Th_1).$$

Das Gleichungssystem für das Gleichgewichtssystem zwischen Mutter und dem Tochternuklid der ersten Generation lässt sich sehr kompakt in einem Mathematik-Programm wie Matlab oder der kostenlosen Software Scilab berechnen, wenn man die Fähigkeit der Matrizenrechnung effizient nutzt (siehe Skript RGG1). Man muss allerdings darauf achten, dass Matlab die Feldelemente immer mit dem Index 1 zu zählen beginnt, nicht wie in anderen Programmiersprachen mit dem Index 0.

```
%RGG1
t=0:0.1:100;
Th0=3.05 %Po-218
Th1=26.8 %Pb-214
A0=1;
A1=0.3;
Thr=Th0/(Th0-Th1);
A0_t=A0*2.^(-t/Th0);
A1_t=A0*Thr*2.^(-t/Th0)+(A1-A0*Thr)*2.^(-t/Th1);
plot(t,A0_t);
hold on;
plot(t,A1_t,'r');
hold off;
```

Hierin ist A0_t die zeitabhängige Aktivität des Mutternuklids und A1_t die zeitabhängige Aktivität für das Tochternuklid. A0 und A1 sind die Anfangsaktivitäten zum Zeitpunkt t=0. Th0 und Th1 sind die Halbwertszeiten von Mutter und Tochternuklid. Die Größe Thr ergibt sich aus dem Verhältnis der Halbwertszeiten: Thr=Th0/(Th0-Th1).

Das Beispiel hier benutzt das System Po-218 mit 3.05min Halbwertszeit als Mutter und Pb-214 mit 26.8min Halbwertszeit als Tochter. Auf Grund der Tatsache, dass die Muttergeneration sehr viel schneller zerfällt, sieht man, dass sich die Tochtergeneration verspätet aufbaut und in dem sich einstellenden Gleichgewicht kaum mehr als seine Anfangsaktivität erreicht, weil die generierende Muttergeneration bereits stark zerfallen ist.

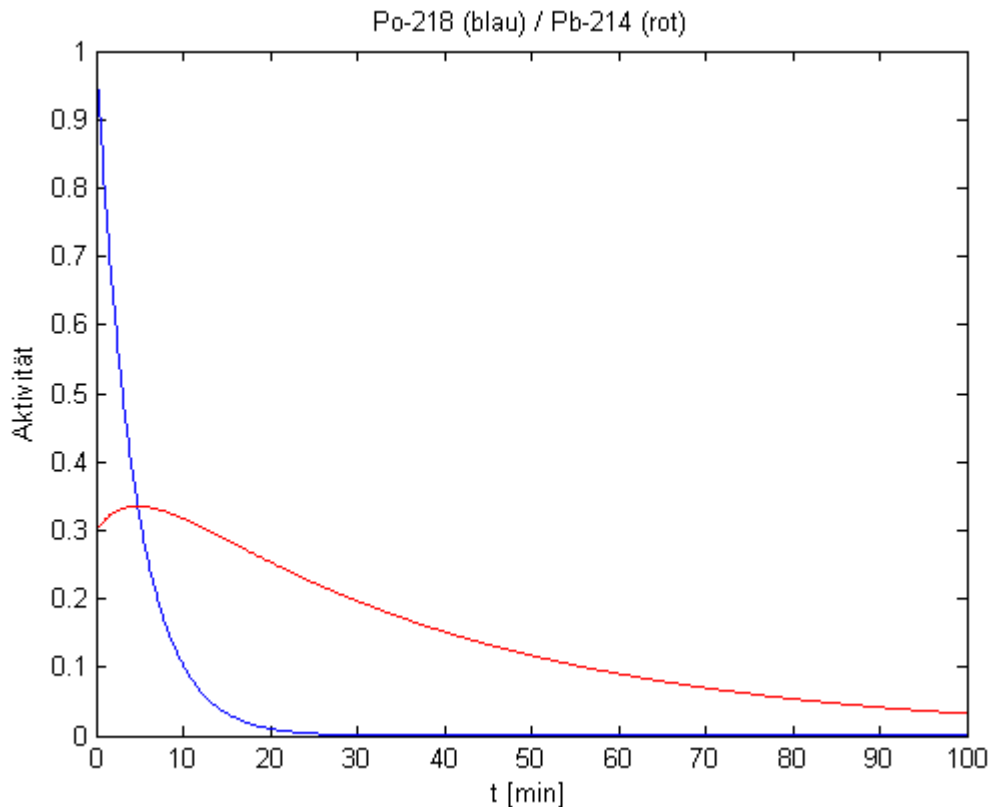


Abb. 1: Das System Mutter- und Tochternuklid am Beispiel des Po-218/Pb-214

Eine geschlossene Lösung für das System Mutter-Tochter-Enkel kann auch noch mit vertretbarem Aufwand formuliert werden. Allerdings sieht man, dass die Ausdrücke sehr länglich werden und die Gefahr, dass man sich mit den Indizes irgendwo vertut, enorm zunimmt. Hier gilt dann:

$$A_0(t) = A_0(0) \cdot 2^{-t/Th_0}$$

$$A_1(t) = A_0(0) \cdot Th_r \cdot 2^{-t/Th_0} + (A_1(0) - A_0(0) \cdot Th_r) \cdot 2^{-t/Th_1}$$

$$A_2(t) = A_0(0) \cdot Th_{r1} \cdot 2^{-t/Th_0} + (A_1(0) \cdot Th_{r4} - A_0(0) \cdot Th_{r2}) \cdot 2^{-t/Th_1} + (A_2(0) - A_1(0) \cdot Th_{r4} + A_0(0) \cdot Th_{r2} - A_0(0) \cdot Th_{r3}) \cdot 2^{-t/Th_2}$$

mit:

$$Th_r = Th_0 / (Th_0 - Th_1);$$

$$Th_{r1} = (Th_0)^2 / ((Th_0 - Th_1) \cdot (Th_0 - Th_2));$$

$$Th_{r2} = Th_0 \cdot Th_1 / ((Th_0 - Th_1) \cdot (Th_1 - Th_2));$$

$$Th_{r3} = (Th_0)^2 / ((Th_0 - Th_1) \cdot (Th_0 - Th_2));$$

$$Th_{r4} = Th_1 / (Th_1 - Th_2);$$

Diese Gleichungen wurden beispielhaft für ein System Po-218, Pb-214 und Bi-214 mit Matlab gerechnet und die Aktivitäten in eine Grafik geplottet (Skript RGG2). Da die Halbwertszeit von dem auf das Bi-214 folgende Po-214 extrem kurz ist (164us), entspricht das Po-214 auch dem Verlauf des Bi-214 und man bekommt den Urenkel in diesem Fall praktisch gratis dazu.

```
%RGG2
clear;
t=0:0.1:100;
Th0=3.05; % Po-218
Th1=26.8; % Pb-214
Th2=19.9; % Bi 214
A0=1;
A1=0.3;
A2=0.0;
Thr=Th0/(Th0-Th1);
Thr1=Th0^2/((Th0-Th1)*(Th0-Th2));
Thr2=Th0*Th1/((Th0-Th1)*(Th1-Th2));
Thr3=Th0^2/((Th0-Th1)*(Th0-Th2));
Thr4=Th1/(Th1-Th2);
A0_t=A0*2.^(-t/Th0);
A1_t=A0*Thr*2.^(-t/Th0)+(A1-A0*Thr)*2.^(-t/Th1);
A2_t=A0*Thr1*2.^(-t/Th0)+(A1*Thr4-A0*Thr2)*2.^(-t/Th1)+(A2-A1*Thr4+A0*Thr2-
A0*Thr3)*2.^(-t/Th2);
plot(t,A0_t);
hold on;
plot(t,A1_t,'r');
plot(t,A2_t,'g');
hold off;
```

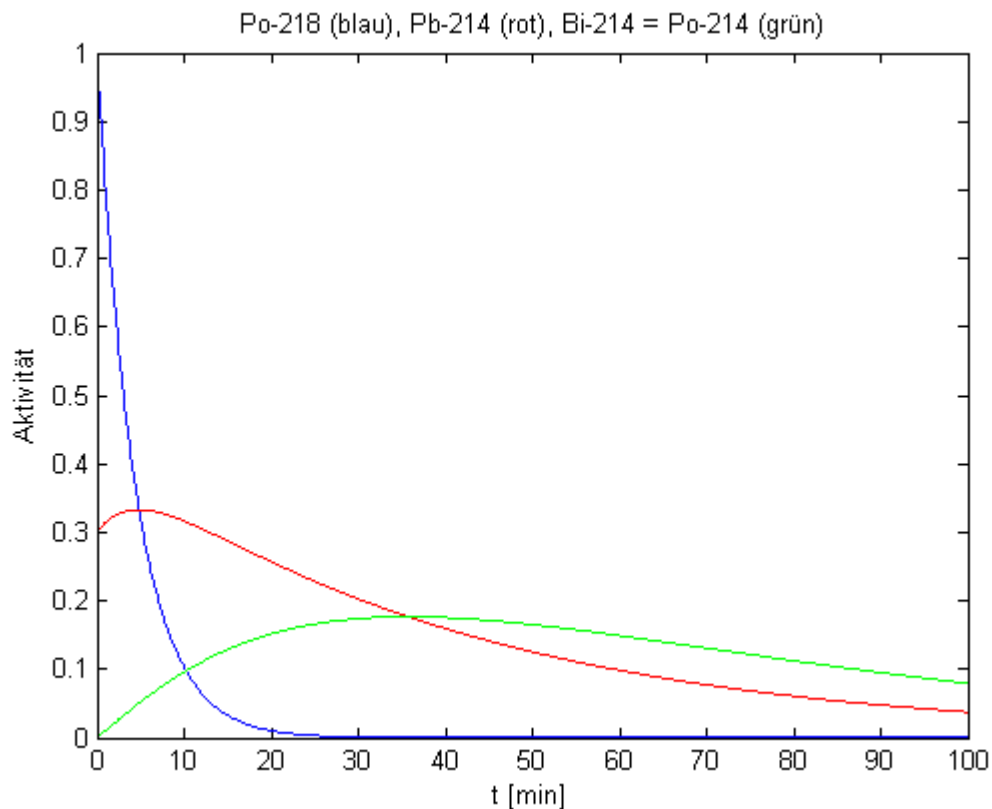


Abb. 2: Das System Mutternuklid Po-218 mit Tochter Pb-214 und Enkel Bi-214, der Urenkel Po-214 verläuft identisch mit dem Bi-214

In diesem System kann man erkennen, dass das Bi-214 mit einer Halbwertszeit von 19.9min, welche dem Pb-214 sehr ähnlich ist, noch mehr verzögert folgt. Da hier eine Anfangsaktivität von 0 für das Bi-214 angenommen wurde, sieht man, wie sich zunächst eine Aktivität aufbaut, die dann aber wegen des Zerfalls der vorausgehenden ähnlich wie diese zerfällt.

Für ein System mit Urenkeln und noch mehr Generationen wird die geschlossene Lösung dann ziemlich aufwendig zu rechnen. Hier ist es also wirklich nötig, dass man eine rekursive Lösung benutzt und zur Simulation entsprechend programmiert. Im Prinzip lassen sich damit die Aktivitätskonzentrationsverläufe über beliebig viele Generationen rechnen. Hier wurde die Berechnung beispielhaft für das System Rn-222, Po-218, Pb-214, Bi-214 in Matlab durchgeführt (Skript RGG-Rekursiv).

```
%RGG_Rekursiv
clear;
t=0:0.1:300;
Th=[3.82*24*60 3.05 26.8 19.9];
Aty0=[1 0.3 0.2 0.1];

maxgen=length(Th)-1;
lam=log(2)./Th;
K=zeros(maxgen+1,maxgen+1);
Aty_t=zeros(length(t),maxgen+1);

i=0;
K(i+1,i+1)=Aty0(i+1); %K00
for i=1:maxgen
    for j=0:i-1
        K(i+1,j+1)=K(i,j+1)*Th(j+1)/(Th(j+1)-Th(i+1)); %Kij
    end
    sumKij=0;
    for j=0:i-1
        sumKij = sumKij + K(i+1,j+1);
    end
    K(i+1,i+1)=Aty0(i+1)-sumKij; %Kii
end
for i=0:maxgen
    for j=0:i
        Aty_t(:,i+1)=Aty_t(:,i+1)+K(i+1,j+1).*2.^(-t./Th(j+1));
    end
end
plot(t,Aty_t(:,1));
hold on;
plot(t,Aty_t(:,2),'r');
plot(t,Aty_t(:,3),'g');
plot(t,Aty_t(:,4),'m');
hold off;
```

Die rekursiven Gleichungen lassen sich natürlich genauso gut in einem Tabellenkalkulations-Programm wie MS-Excel oder OpenOffice Calc berechnen, wenn entsprechende Bezüge auf Zellen, die zuvor bereits berechnet wurden, hergestellt werden.

Einem aufmerksamen Elektrotechniker oder Elektroniker fällt bei der Betrachtung der Lösungen für den radioaktiven Zerfall aber auch sofort die Ähnlichkeit zu Spannungsverläufen am RC-Glied auf. Das eröffnet eine weitere sehr einfache Simulationsmöglichkeit. In der Tat kommt hier die schöne Seite der Physik zum Ausdruck, dass hinter unterschiedlichen Erscheinungen immer eine ähnliche Mathematik steckt. Sucht

man beispielsweise die Lösung für Strom und Spannung im RC-Glied, dann stößt man auf eine der Zerfallsgleichung vergleichbare Differentialgleichung:

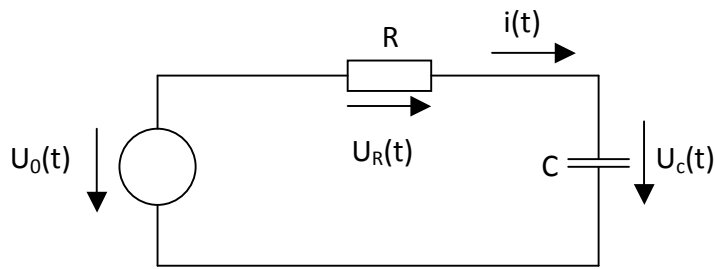


Abb. 3: Spannungen und Strom beim einfaches RC-Glied

Für Strom und Spannung gelten:

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t)$$

$$U_C(t) = U_0(t) - U_R(t)$$

Am Kondensator ist:

$$i_C(t) = C * dU_C/dt$$

und am Widerstand :

$$i_R(t) = U_R(t)/R$$

Da die Ströme i_R und i_C identisch sind, muss sein:

$$C * dU_C/dt = U_R(t)/R$$

Also ergibt sich:

$$U_R(t) = R * C * dU_C/dt$$

Und damit:

$$U_C(t) = U_0(t) - R * C * dU_C/dt$$

Oder umgestellt :

$$dU_C/dt = 1/(RC) * U_0(t) - 1/(RC) * U_C(t)$$

vergleicht man dieses Ergebnis mit der Differentialgleichung für die Tochtergeneration beim Zerfall:

$$dA_1/dt = \lambda_0 * A_0(t) - \lambda_1 * A_1(t)$$

dann erkennt man, dass der Spannungsverlauf dem Aktivitätsverlauf und die Zerfallskonstante dem Kehrwert der RC-Zeitkonstanten entspricht. Der einzige Unterschied ist, dass die Mutteraktivität eine andere Zeitkonstante als Vorfaktor hat, verglichen zur

Zerfallsgleichung. Das lässt sich aber dadurch ausgleichen, indem man die Mutteraktivität entsprechend skaliert, wenn man das RC-Glied der Muttergeneration mit dem RC-Glied des Tochterschaltkreises verkoppelt. Um die Generationen zu verkoppeln kann man eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle verwenden.

Das bedeutet, dass man den radioaktiven Zerfall in einer Zerfallskette auch ganz einfach mit einem analogen Schaltungssimulator wie z.B. Spice simulieren kann. Kostenlose Versionen des Spice Simulators gibt es bei den Halbleiterherstellern wie z.B. bei Texas Instruments und Linear Technology. Hier wurde der Spice Simulator LTSpice von Linear Technology verwendet.

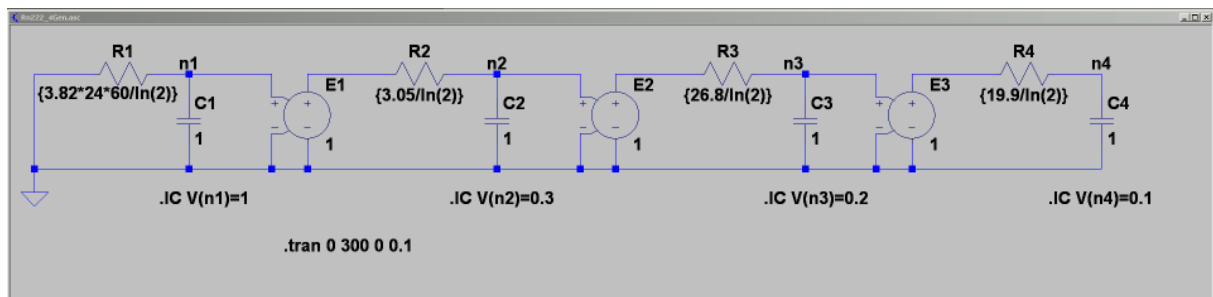


Abb. 4: Spice (LTSpice) Simulation eines elektrischen Kettenleiters als gleichwertige Simulation für Aktivitäten in einer Zerfallskette

Die Anfangsaktivitäten kann man durch entsprechende Initial Conditions (.IC Direktive) berücksichtigen. Was man auch geschickt nutzen kann, ist die geschweifte Klammer um die Halbwertszeiten in die Zerfallskonstanten umzurechnen. Die RC-Zeitkonstante wird einfach durch den Wert des Widerstands bestimmt (Kehrwert der Zerfallskonstante) und der Wert der Kapazität wird auf 1 gesetzt. Der Kopplungsfaktor der gesteuerten Quelle wird ebenfalls auf 1 gesetzt um hier den Faktor der RC-Zeitkonstante im Vergleich zum Zerfallsgesetz zu kompensieren. Diese Simulation lässt sich dann sehr einfach mit Copy&Paste auch weitere Folgegenerationen erweitern, sofern das sinnvoll ist. Die Aktivitäten werden in der Simulation dann als Spannungen an den Knoten n_i der jeweiligen Teil-RC-Glieder angezeigt.

In diesem Beispiel wurde der Zerfall einer frischen Radongas-Anfangskonzentration (100%) Rn-222 in alle seine typischen relevanten Zerfallsprodukte Po-218, Pb-214, Bi-214 simuliert. Das auf das Bi-214 folgende Po-214 hat eine Halbwertszeit von nur 164 μ s, es folgt also instantan dem Bi-214 und hat damit auch einen Verlauf, der vom Bi-214 nicht zu unterscheiden ist. Es muss daher also nicht gesondert simuliert werden, sondern man kann gleich $V(n5)=V(n4)$ annehmen.

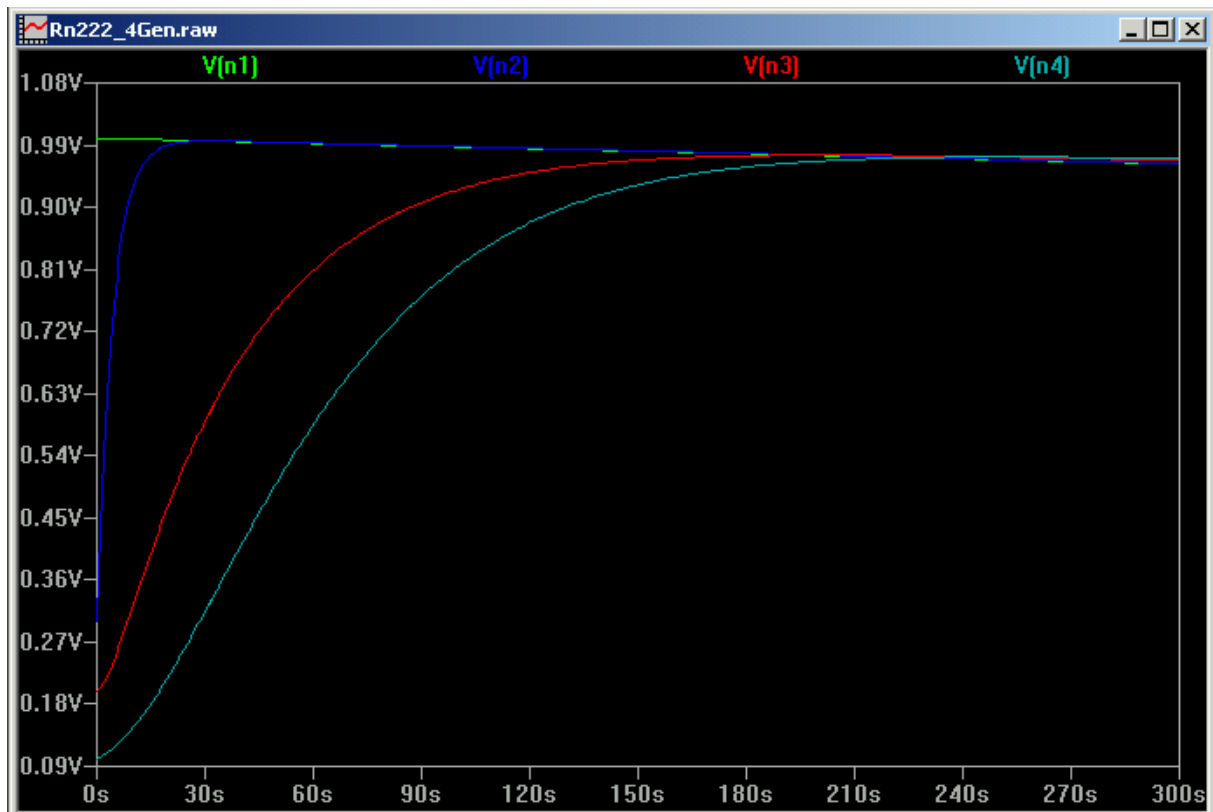


Abb. 5: Ergebnis der Simulation einer gegebenen Anfangsaktivität von Rn-222 (grün) und seiner relevanten Folgeprodukte, Po-218(blau), Pb-214(rot), Bi-214=Po-214(türkis)

Hier sieht man nun gegenüber den Grafiken oben einen wesentlichen Unterschied. Dadurch, dass hier als Muttergeneration eine Radonaktivität mit einer Anfangsaktivität von 100% angenommen wurde, und dieses eine vergleichsweise lange Halbwertszeit hat, können sich also die folgenden Tochtergenerationen ebenfalls auf eine Gleichgewichtsaktivität von fast 100% aufbauen. Dieser „Pile-Up“ genannte Anstieg auf die Gleichgewichtskonzentration erfolgt mit der jeweiligen Halbwertszeit der kürzerlebigen Radionuklide. In dieser Zeit kann man dann auch einen Anstieg der Gesamtaktivität erkennen. Die Probe nimmt also mit ihrer Gesamt-Radioaktivität durch Bildung der Folgeprodukte erst einmal kräftig zu. Erst allmählich wirkt sich dann der Zerfall des generierenden Radon aus. D.h. die Tochter- und Enkelgenerationen folgen dann im Gleichgewicht der Muttergeneration und werden immer weniger häufig nachgebildet und zerfallen daher mit vergleichbarer Zeitkonstante.

Nun kann man sich auch leicht vorstellen, dass wenn man das Radium (Ra-226) mit 1600 Jahren Halbwertszeit dazunimmt, dass dieses als praktisch konstante Quelle für das Radon angesehen werden kann und damit nach vergleichbar kurzer Zeit alle Folgeprodukte im Gleichgewicht dieselbe Aktivität erreichen.

Geht man vom Uran aus mit mehr als 4 Mrd. Jahren Halbwertszeit, dann bestimmt dessen Aktivität die des Radium und aller Folgeprodukte, allerdings erst wenn das Radium nach $5 \cdot$ bis $7 \cdot 1600$ Jahren im Gleichgewicht ist. Für natürliches Uranerz im Gestein war diese Zeit gar kein Thema von heute aus gesehen. Wurde aber bei der Herstellung von Uranfarben beispielsweise das Radium abgetrennt, dann dauert es erst mal einige Tausend Jahre bis das Radium wieder in der Uranfarbe auftaucht und sich auch wieder daraus das Radon bilden kann. Und so alt sind die Uranfarben noch nicht. Daher findet man bei der gamma-spektroskopischen Untersuchungen auch keine Bi-214 Linie im Uranglas oder in

Uranglasuren von Keramik. Was im Gammalspektrum eines Uranglases auch enorm täuschen kann ist eine deutliche Linie an der Stelle wo man eigentlich das Radium-226 mit einer geringen Intensität von nur 3% aller Zerfälle erwartet (186.21keV). Dazu muss man nun daran denken, dass die Uranfarben noch deutlich vor dem zweiten Weltkrieg hergestellt wurden. D.h. es gab seitens der Militärs noch nicht den Zwang, dass zivil genutztes Uran abgereichert sein musste. Damit hat man in der Farbe auch zu 0.7% das U-235 und dieses emittiert Gammaquanten bei 185.72keV mit 57% Intensität. D.h. im Gammalspektrum eines NaI-Detektors kann man die Ra-226 Linie und die U-235 Linie gar nicht trennen. Wenn also in einer Uranfarbe keine Bi-214 Linie zu sehen ist, dann ist die Linie bei 186keV die Folge des natürlichen U-235 Isotops und nicht des Ra-226, da sonst nämlich das Bi-214 mit dem Ra-226 im Gleichgewicht und daher auch sichtbar sein müsste.

Das gleiche gilt im Prinzip auch für die Herstellung von Phosphordüngemitteln aus uranhaltigem Phosphorit (aber nur im Prinzip). Hier landet das Radium zu einem Großteil im Gips, der beim Aufschluss des Phosphors als Nebenprodukt entsteht. Man könnte daher also denken, dass Phosphordünger kein Radon exhaliert kann, weil nach der Herstellung aus dem noch vorhandenen Uran noch kein Radium als Mutternuklid zum Radon entstanden ist. Das Radium mit seiner langen Halbwertszeit von 1600 Jahren würde also wie eine Barriere für die Bildung der Folgeprodukte in der Zerfallskette wirken. Allerdings deponieren einige Düngemittelhersteller den strahlenden Gips jetzt nicht mehr wie früher auf großen Halden (wie in Florida), sondern entsorgen ihn beim Verkauf ihres Düngemittels ganz praktisch gleich mit dem Produkt selbst, indem sie ihn nämlich als Zuschlagstoff wieder in den Dünger mischen. Daher exhaliert der Dünger dann auch wieder wie gewohnt das Radon und zeigt auch die Bi-214 Linie im Gammalspektrum.

Was dabei aber auch klar wird, ist dass ein Düngemittel, das kein Radon exhaliert deswegen noch nicht uranarm sein muss. Aber es enthält dann wenigstens kein Radium, das der menschliche Organismus mit dem Kalzium verwechselt und es daher auch in die Knochen einbaut wo es munter weiterstrahlt.

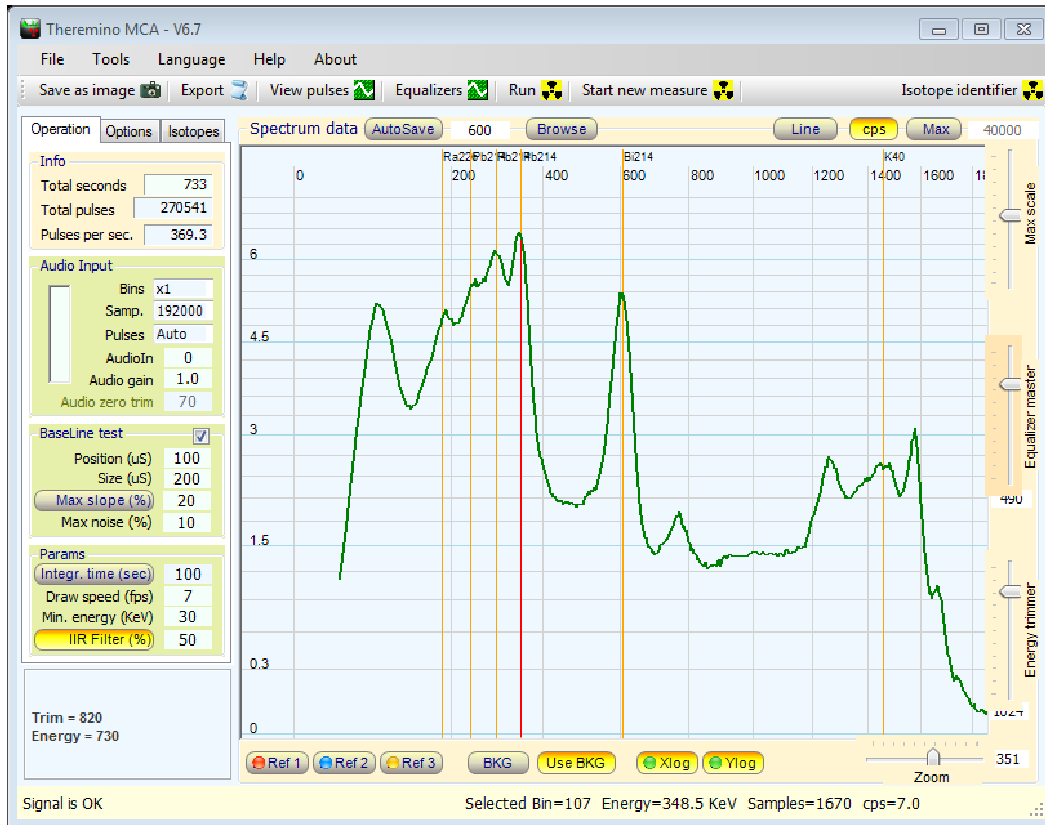


Abb. 6: Gammاسpektrum einer Uranerzprobe aus Menzenschwand, deutlich sieht man die Bi-214 Linie



Abb. 7: Gammاسpektrum eines mit Annagrün gefärbten Uranglases, außer einem starken Röntgenfluoreszenzpeak knapp unter 100keV sieht man nur eine Linie bei 186keV, die aber keine Ra-226 Linie ist sondern vom natürlichen U-235 stammt

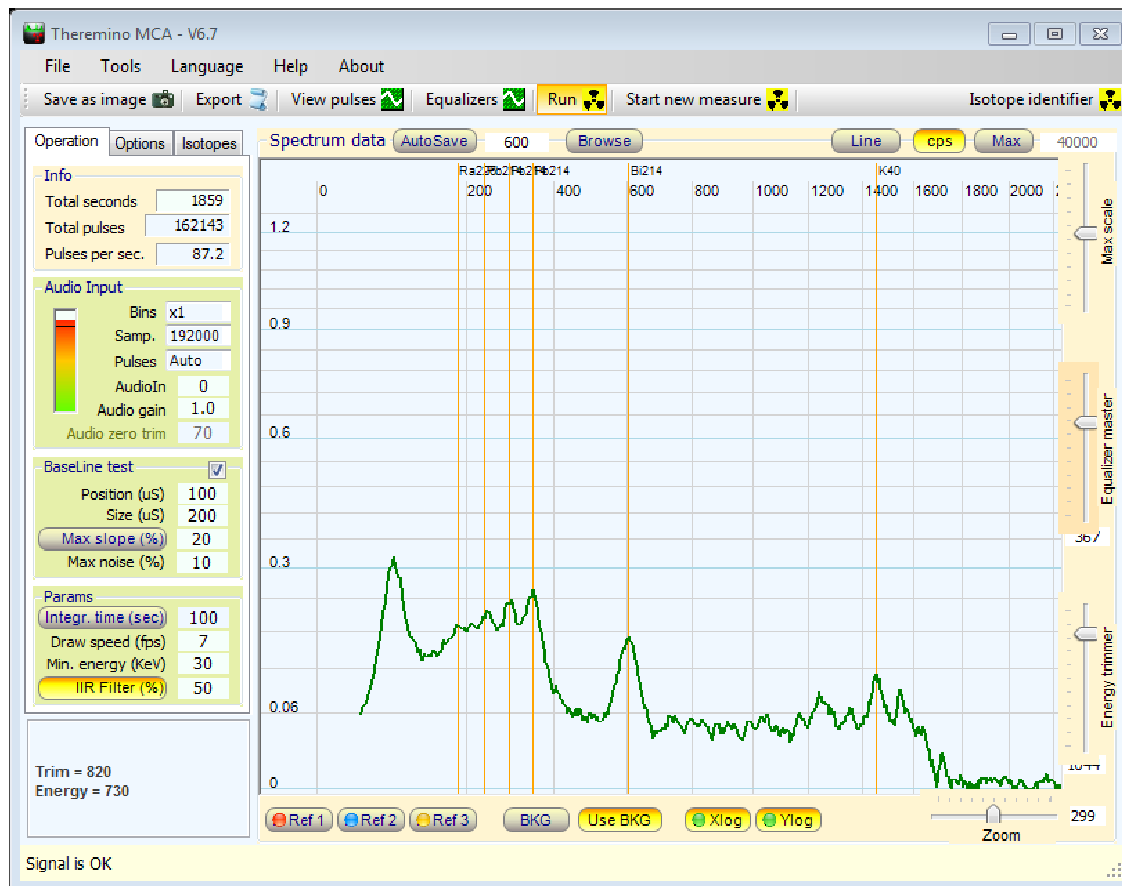


Abb. 8: Gammaskpektrum eines Superphosphatdünger 18% der Firma ICL (Vertrieb über die BayWa AG). Deutlich erkennt man die Bi-214 Linie als Indikator für die Präsenz des Radium als Bestandteil der Zerfallskette

Im Zusammenhang mit dieser Untersuchung geht ein großer Dank an Prof. Henning von Philipsborn vom Radiometrischen Seminar der Universität Regensburg für die Bereitstellung von Messmitteln, Proben und die Demonstration von etlichen Experimenten zur Messung der Radonaktivität und ganz besonders für die umfangreiche Diskussion zu der Thematik.

Literatur

Hanno Krieger, Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes
Springer Verlag, 2012

Henning von Philipsborn, Multimedia Analysis of Radon in 10mL of Air for in Laboratory Quality Assurance
Microchim. Acta 148 pp215-220 (2004)

Henning von Philipsborn, Efficient Adsorption of Waterborne Short-Lived Radon Decay Products by Glass Fiber Filters
Health Phys. 72(2): pp 277-281 (1997)

Henning von Philipsborn, Radon Exhalation from Building Materials – A Contribution to Metrology in Radiation Protection
5th International Conference on High Levels of Natural Radiation and Radon Areas
Sept. 4-7, 2000